

Ens trobem davant d'una obra enormement atractiva, que pot interessar a un ampli sector de lectors, més enllà de l'estricta servei docent que l'ha motivada. La tria dels continguts és molt encertada i els temes estan presentats i exposats de manera magistral. Des d'un punt de vista didàctic, el llibre presenta una innovació que mereix una menció especial. Cada nou objecte matemàtic considerat en el text, s'acompanya immediatament del disseny i implementació d'un algorisme que permet el seu càlcul efectiu. Comparteixo la opinió de l'autor

en el sentit que el disseny d'un algorisme per calcular un objecte en permet una comprensió més profunda i, a la vegada, la implementació efectiva de l'algorisme redunda en una millor comprensió de l'estructura de l'algorisme i, per tant, també de l'objecte a calcular. Aquesta interacció mútua dels aspectes matemàtics i computacionals és un dels aspectes més valuosos del llibre i, al meu parer, hauria de ser considerada en la confecció de la majoria dels llibres de text de matemàtiques a nivell de llicenciatura o enginyeria.

Enric Nart
UAB

Problemes

Tornem a la cita i, ara, el lapse de temps ha estat força més curt!

Hem de començar demanant disculpes als nostres entusiastes col·laboradors: un comportament inesperat d'una macro de \TeX va convertir tot d'arrels cúbiques en triples d'arrels quadrades, cosa que feia que l'enunciat del problema **A.62** aparegués tot proposant una propietat trivialment falsa, tal com ens feren notar immediatament molts amables lectors. El mal, ai làs!, ja estava fet i, tot i que de seguida vam publicar l'esmena de l'errada a la pàgina web de la Societat, som conscients que el missatge no haurà arribat a totes les persones interessades.

Així, doncs, tornem a proposar el problema **A.62**, amb l'esperança que, ara, els déus ens seran propicis.

Volem pensar que és la creença que els intervals entre número i número de la *SCM/Notícies* són prou llargs i no la desconfiança produïda per l'errada, la causa que no haguem rebut més que una sola solució als problemes supervivents del número 20, la qual es deu a n'Enric Ventura, de la UPC, a qui agraïm el seu treball!

Com sempre, tornem a agrair el seu treball als lectors que ens proporcionen enunciats de problemes i/o ens n'envien les solucions. El correu electrònic pels enviaments ara és cromero@xtec.net (atenció: la *Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya* ha canviat el seu domini!) i els materials escrits en \TeX o \LaTeX ens faciliten força la feina. Moltíssimes gràcies!

Problemes proposats

A62. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC) Siguin a_1, a_2, \dots, a_n nombres positius. Proveu que

$$\frac{a_1}{a_2 + \sqrt[3]{a_1 a_2^2}} + \frac{a_2}{a_3 + \sqrt[3]{a_2 a_3^2}} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \sqrt[3]{a_n a_1^2}} \geq \frac{n}{2}.$$

A66. (Proposat per Enric Ventura, UPC) Demostreu que, donat un conjunt $M = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ de r matrius de nombres enters $n \times n$, invertibles o no, sempre n'hi ha una altra, B , que no es pot expressar com a producte de

matrius del conjunt M (en qualsevol ordre, de qualsevol longitud, i acceptant repeticions).

A67. (Proposat per la redacció)

Trobeu el lloc geomètric dels centres dels triangles equilàters inscrits a l'el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A68. (D'una olimpíada brasilera)

Trobeu totes les solucions enteres i positives de l'equació

$$(m+1)^n - 1 = m!$$

Solucions

A63. (Proposat per Pelegrí Viader, UPF) Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua i $f(0) = f(1)$, demostreu que:

a) Per cada enter positiu n existeix una corda horitzontal del graf de f (una corda horitzontal és el segment que uneix dos punts del graf amb la mateixa ordenada] de longitud $1/n$.

b) Demostreu que f no té per què tenir necessàriament cordes horitzontals amb longitud que no sigui el recíproc d'un nombre enter.

(Teorema de la corda universal)

Solució: (Solució d'Enric Ventura, UPC) Si $f(0) = f(1/n)$ ja tenim la corda que busquem. En cas contrari, canviant f per $-f$ si cal, podem suposar que $f(0) < f(1/n)$. Mirem ara l'índex i que correspon al màxim dels nombres $f(0), f(1/n), \dots, f((n-1)/n), f(1)$. Com que $f(0) = f(1) < f(1/n)$, tindrem $i \neq 0, n$. Així, podem escriure les desigualtats

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq f\left(\frac{i}{n}\right) \geq f\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Si una d'aquestes és una igualtat ja tenim la corda que busquem. En cas contrari,

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right) < f\left(\frac{i}{n}\right) > f\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Considerem ara la nova funció $g : [0, \frac{n-1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$. És contínua perquè f ho era i, a més, $g(\frac{i-1}{n})$ i $g(\frac{i}{n})$ tenen signes contraris. Segons el teorema de Bolzano hi ha un punt $\alpha \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ en el qual $f(\alpha) - f(\alpha + \frac{1}{n}) = g(\alpha) = 0$. Aquí tenim, doncs, la corda horitzontal de longitud $\frac{1}{n}$ que buscàvem.

Per a l'apartat b), considerem la funció $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ determinada per:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq 0,25 \\ -4x + 2, & \text{si } 0,25 < x \leq 0,75 \\ 4x - 4, & \text{si } 0,75 < x \leq 1 \end{cases}$$

el graf de la qual és la línia trencada que passa pels punts $(0, 0)$, $(0,25, 1)$, $(0,75, -1)$ i $(1, 0)$.

És clar que cordes horitzontals en els nivells positius només n'hi ha de longituds entre 0 i $\frac{1}{2}$. Igualment per a cordes dels nivells negatius. Pel que fa a cordes de nivell 0 només n'hi ha tres i són de longituds $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ i 1. Per tant, aquesta funció no té cordes horitzontals de cap longitud superior a $\frac{1}{2}$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

En la *SCM/Notícies*, 19, vam publicar que Àngel Jorba i Amadeu Delshams eren els directors de la tesi de José Pablo Sánchez Casas quan el director va ser només Àngel Jorba. Disculpeu l'error.

En la *SCM/Notícies*, 18, pàgina 51, va sortir anunciada la recenció de la tesi de Josep Álvarez però, per error, el resum que apareixia a continuació corresponia a una altra tesi. En demanem disculpes i publiquem el resum correcte.

- JOSEP ÀLVAREZ MONTANER va llegir la seva tesi, dirigida per Santiago Zarzuela, titulada *Local cohomology modules supported on monomial ideals*, el dia 24 de maig de 2002. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.

Sigui $R = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anell de polinomis amb coeficients en un cos k de característica zero. El nostre objectiu és, tot seguint la línia de recerca encetada per G. Lyubeznik, utilitzar en profunditat la teoria de \mathcal{D} -mòduls per tal d'estudiar els mòduls de cohomologia local de R amb suport un ideal $I \subseteq R$. En especial, ens interes-

sa descriure de manera efectiva l'anul·lació, les propietats de finitud i entendre millor l'estructura d'aquests mòduls. La principal eina que utilitzarem és un invariant que podem associar als mòduls de cohomologia local i més en general a tot \mathcal{D} -mòdul holònom: el cicle característic.